5. Énoncés des exercices

Exercice 11.1 Les fonctions sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.
1) Donnez l'expression de $f'(x)$.
2) Déterminez son signe suivant les valeurs de x puis dressez le tableau de variation de f.

a) $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x - 4$
b) $f(x) = x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$
c) $f(x) = -x^4 - 4x^2 + 5$

Exercice 11.2 Les fonctions sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.
1) Donnez l'expression de $f'(x)$.
2) Déterminez son signe suivant les valeurs de x puis dressez le tableau de variation de f.

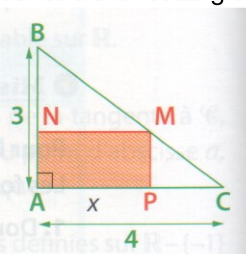
a) $f(x) = \frac{-3x}{1+x^2}$
b) $f(x) = 1 + \frac{2}{x^2+4}$

Exercice 11.3 Dans chacun des cas suivants, étudiez les variations de la fonction f après avoir déterminé son ensemble de définition.
a) $f(x) = 3 - \frac{4}{x-3}$
b) $f(x) = 2x + 1 + \frac{2}{x+1}$

Exercice 11.4 a) Étudiez les variations de la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f(x) = x + \frac{1}{x}$.
b) Démontrez que, quel que soit le nombre x strictement positif, la somme de x et de son inverse est supérieure ou égale à 2.

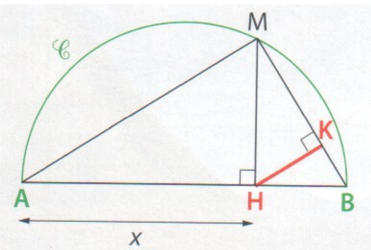
Exercice 11.5 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -2x^2 + 4x - 3$.
1) Étudiez les variations de f.
2) Déduisez-en le minimum sur $\mathbb{R}$ de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

Exercice 11.6 ABC est un triangle rectangle en A. $AC = 4$, $AB = 3$. P est un point du segment $[AC]$. On construit le rectangle APMN et on pose $AP = x$, avec $0 \leqslant x \leqslant 4$.



1.a) Calculez MP en fonction de x.
1.b) Déduisez-en que l'aire $\mathscr{A}(x)$ du rectangle MNAP est égale à $\frac{3}{4}(4x - x^2)$.
2.a) Étudiez les variations de la fonction $\mathscr{A}$ sur l'intervalle $[0; 4]$.
2.b) Déduisez-en la valeur de x pour laquelle $\mathscr{A}$ est maximale.

Exercice 11.7 On considère le demi-cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$, avec $AB = 6cm$.



H est un point du segment [AB] distinct de A et de B. On note x la longueur AH. La perpendiculaire en H à (AB) coupe $\mathscr{C}$ en M. K est le pied de la hauteur issue de H dans le triangle MHB.
L'objectif de cet exercice est de déterminer pour quelle(s) position(s) de H sur]AB[, le segment [HK] a une longueur maximale. On note $HK = f(x)$.
1.a) En exprimant $\cos(\widehat{BAM})$ de deux manières différentes, prouvez que $AM = \sqrt{6x}$.
1.b) Justifiez le parallélisme de (HK) et de (AM) et déduisez-en que $f(x) = \frac{\sqrt{6}}{6}(6 - x)\sqrt{x}$.
2.a) f est définie et dérivable sur $]0; 6[$. exprimez $f'(x)$.
2.b) Déduisez-en les variations de f et concluez.